POSIZIONI RECIPROCHE TRA RETTE E PIANI

Margherita Maria Ferrari

(a) **Tra due piani**.
Per stabilire la posizione reciproca tra i due piani $\alpha : a_1x+b_1y+c_1z = d_1$ e $\beta : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ possiamo studiare il sistema lineare

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

che rappresenta l'intersezione tra α e β. La matrice dei coefficienti del sistema risulta essere

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix},$$

mentre la matrice completa è

$$A' = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{bmatrix}.$$

Ricordiamo che due piani α e β possono essere:

1) non paralleli (quindi hanno in comune una retta);
2) paralleli e distinti (quindi non hanno punti in comune);
3) paralleli e coincidenti (quindi tutti i loro punti sono in comune).

Inoltre $1 \leq r(A) \leq 2$ e $r(A) \leq r(A') \leq 2$.
Osserviamo che le righe della matrice A corrispondono, rispettivamente, ai parametri direttori di α e β:

- se $r(A) = 2$, allora anche $r(A') = 2$ e i due piani risultano non paralleli. Il sistema è possibile ed ammette ∞^1 soluzioni che corrispondono ai punti della retta comune ai due piani;
- se $r(A) = 1$, le righe della matrice A risultano linearmente dipendenti; ovvero le terne (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) risultano proporzionali e i due piani sono paralleli. In particolare sono distinti o coincidenti a seconda che $r(A')$ sia rispettivamente 2 o 1.

Riassumendo:

	$r(A') = 1$	$r(A') = 2$
$r(A) = 1$	3)	2)
$r(A) = 2$	-	1)

(b) **Tra tre piani**.

Con un ragionamento simile al precedente è possibile stabilire la posizione reciproca di tre piani $\pi_i : a_i x + b_i y + c_i z = d_i$, $i = 1, 2, 3$, studiando il sistema lineare

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

ed

$$A' = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

sono rispettivamente la matrice dei coefficienti e la matrice completa. Si noti che in questo caso $1 \leq r(A) \leq 3$ e $r(A) \leq r(A') \leq 3$.

Elenchiamo le possibili configurazioni di tre piani nello spazio:

1) i tre piani sono coincidenti: $r(A) = r(A') = 1$;
2) i tre piani sono paralleli e non coincidenti: $r(A) = 1$ e $r(A') = 2$;
3) i tre piani hanno una retta in comune: $r(A) = r(A') = 2$;
4) due piani si incontrano lungo una retta che risulta parallela e disgiunta dal rimanente piano: $r(A) = 2$ e $r(A') = 3$;
5) i tre piani hanno un solo punto in comune: $r(A) = r(A') = 3$.

Riassumendo:

	$r(A') = 1$	$r(A') = 2$	$r(A') = 3$
$r(A) = 1$	1)	2)	-
$r(A) = 2$	-	3)	4)
$r(A) = 3$	-	-	5)

(c) **Tra una retta ed un piano**.

Analizziamo ora le posizioni reciproche tra il piano $\pi : a'x + b'y + c'z = d'$ e la retta r:

$$r = \alpha \cap \beta : \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}.$$

Per stabilire la posizione reciproca di r e π studiamo il sistema lineare

$$\begin{cases} a'x + b'y + c'z = d' \\ a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

che rappresenta l'intersezione tra r e π.
Utilizzando la classificazione del caso precedente otteniamo che le possibili posizioni tra r e π risultano:

1) r e π sono incidenti in un punto: $r(A) = r(A') = 3$;
2) r e π sono paralleli e disgiunti: $r(A) = 2$ e $r(A') = 3$;
3) r è contenuta in π: $r(A) = r(A') = 2$.

Concludendo:

	$r(A') = 2$	$r(A') = 3$
$r(A) = 2$	3)	2)
$r(A) = 3$	-	1)

(d) **Tra due rette**.
L'ultimo caso da analizzare riguarda le posizioni reciproche tra due rette

$$r : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} a'_1x + b'_1y + c'_1z = d'_1 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z = d'_2 \end{cases}.$$

Ricordiamo che due rette nello spazio possono essere:

1) coincidenti;
2) parallele e distinte;
3) incidenti in un punto;
4) sghembe.

Osserviamo che il sistema omogeneo

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

rappresenta una retta, r', parallela ad r e passante per l'origine O; in particolare ogni autosoluzione[1] del sistema che definisce r' è una terna

[1] Un sistema omogeneo ammette sempre la soluzione nulla; una soluzione diversa dalla soluzione nulla è detta autosoluzione.

di parametri direttori di r.
Consideriamo il sistema S che rappresenta l'intersezione tra r ed s

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a'_1x + b'_1y + c'_1z = d'_1 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z = d'_2 \end{cases}$$

ed il sistema S_0 che rappresenta l'intersezione tra le rette r' $(r'//r, O \in r')$ ed s' $(s'//s, O \in s')$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a'_1x + b'_1y + c'_1z = 0 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z = 0 \end{cases} .$$

Se r ed s sono parallele, allora $r' \equiv s'$ ed il sistema S_0 ammette ∞^1 soluzioni.
In relazione ai sistemi precedenti si ottengono le matrici

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \end{bmatrix}$$

ed

$$A' = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 & d'_2 \end{bmatrix}$$

tali che $2 \leq r(A) \leq 3$ e $r(A) \leq r(A') \leq 4$.

Analizziamo i vari casi:

1. se $r \equiv s$, allora il sistema S deve ammettere ∞^1 soluzioni che rappresentano tutti i punti di $r \equiv s$: $r(A) = r(A') = 2$;
2. se r ed s sono parallele e distinte, il sistema S non ammette soluzioni, mentre S_0 deve ammettere ∞^1 soluzioni in quanto $r' \equiv s'$: $r(A) = 2$ e $r(A') = 3$;

3. se r ed s hanno un unico punto in comune, S deve essere possibile ed ammettere un'unica soluzione che rappresenta il punto di intersezione tra r ed s: $r(A) = r(A') = 3$;
4. se r ed s sono sghembe, il sistema S_0 deve avere solo la soluzione nulla (in altre parole S_0 non ammette autosoluzioni), mentre S è impossibile: $r(A) = 3$ e $r(A') = 4$.

Riassumendo:

	$r(A') = 2$	$r(A') = 3$	$r(A') = 4$
$r(A) = 2$	1)	2)	-
$r(A) = 3$	-	3)	4)

Bibliografia

(1) M. Boella, *Analisi matematica e algebra lineare. Vol. 1*, Pearson, 2012.

(2) M.R. Casali, C. Gagliardi, L. Grasselli, *Geometria*, Progetto Leonardo, 2008.